„M+" 3-4 /1997

МЕЖДУНАРОДНА КОНФЕРЕНЦИЯ „РАБОТА С ИЗЯВЕНИ УЧЕНИЦИ ПО МАТЕМАТИКА", ВАРНА, 29 МАЙ – 1 ЮНИ, 1997

Успешно проведеният семинар на същата тема в края на май 1996 година провокира организаторите – МГ „Баба Тонка" – Русе, Институт по математика и информатика при БАН и СМБ да организират конференция със значително по-широко международно участие. Освен 27 математици от София, Варна, Русе, Бургас, Ловеч, Ямбол, Добрич и Силистра в работата на конференцията се включиха проф. Алексей Толпиго от Киев, проф. Валентин Лейфура от Николаевск, Галина Леонова и Светлана Ошенко от Симферопол и Кабира Дадашбекова от Баку. Задочно участваха проф. Франсиско Росадо от Валядолит и проф. Николай Розов от Москва. Успешната подготовка и провеждане на конференцията дължим и на активната подкрепа на кмета на Русе – инж. Димитър Калчев, на председателя на Програмния комитет - акад. Петър Кендеров и на председателя на СМБ - доц. Чавдар Лозанов.

При откриването на конференцията приветствие от името на Световната федерация на националните математически състезания – WFNMC поднесе доц. Любомир Давидов. С голям интерес бяха посрещнати докладите: *ст.н.с. Сава Гроздев*: „Българското участие в Балканските математически олимпиади"; *доц. Любомир Давидов*: „Суперпрости числа"; *Пламен Пенчев*: „Представяне на естествените числа като сума от два квадрата"; *Тодор Митев*: „Неравенства между положителни числа със сума или произведение равни на единица" *проф. Алексей Толпиго*: „Многоступенчатые задачи"; *проф. Валентин Лейфура*: „О решение математических задач с использованием принципа крайнего"; *Емил Карлов*: „Една стереометрична задача"; *Пламен Пенчев*: „Характеристични свойства на някои многостени"; *Kabira Dadashbekova*: "The development of skills and habits of pupils at the mathematical lessons"; *Николай Николов*: „Функционални уравнения"; *Георги Демиров*: „Трудно-изчислими задачи"; *Румен Раев*: „Елипси в класическата геометрия".

От името на проф. Росадо, доц. Л. Давидов представи проект за организиране на средиземноморско математическо състезание за страните от Гибралтарския проток до Черно море. То може да се провежда чрез изпращане на задачи до всяка страна – участник, т.е. без да се налага пътуване в чужбина.

Организирането на математическите състезания в България беше обект на оживена дискусия. Учители от Русе, Ямбол и Бургас споделиха опит в провеждането на местни очно-задочни конкурси – инициативи, които безспорно обогатяват математическия живот в страната. При голяма активност премина и дискусията, водена от доц. Иван Тонов, посветена на урочната и извънкласната работа.
Актуална информация за националния кръг на олимпиадата сподели ст.н.с. О. Мушкаров. Участниците се запознаха и със задачите от втори кръг на австрийската олимпиада, които предлагаме и на читателите на М+:

28 Олимпиада по математика в Австрия
Областен кръг, 29 април 1997 г.

1. Намерете всички положителни естествени числа n, които удовлетворяват неравенството
$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)} < 1-\frac{1}{n}.$$
(*Забележка:* Според австрийските учебници по математика нулата е естествено число.)

2. Намерете всички реални решения (x, y) на системата $\left|\begin{array}{l}(y^2+6)(x-1)=y(x^2+1)\\(x^2+6)(y-1)=x(y^2+1).\end{array}\right.$

3. Даден е успоредникът $ABCD$. Построена е окръжност K_1, която се допира до отсечките AB и AD без да излиза извън успоредника. Построена е и окръжност K_2, която се допира до отсечките BC и CD без да излиза извън успоредника. Радиусите r_1 и r_2 на двете окръжности са избрани така, че те се допират в точка T. Намерете множеството от допирни точки T, когато r_1 приема всички възможни стойности.

4. Дадена е редицата $a_0, a_1, a_2, \dots$ от естествени числа, които удовлетворяват рекурентната зависимост $a_n = a_{n-1}^2+a_{n-2}^2+a_{n-3}^2$ за $n \geq 3$. Докажете, че ако $a_k = 1997$, то $k \leq 3$.

На участниците бяха предложени за обсъждане задачи от канадското списание CRUX Mathematicorum. Ето някои от тях:

2103. Даден е $\triangle ABC$. Нека D е точка от продължението на страната BC в точка B така, че $BD = BA$ и нека M е среда на AC. Ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ пресича DM в точка P. Докажете, че $\sphericalangle BAP = \sphericalangle ACB$.

2114. $ABCD$ е квадрат, в който е вписана окръжност Γ. Допирателната l до Γ пресича страните AB и AD и диагонала AC съответно в точките P, Q и R. Докажете, че $\frac{AP}{PB}+\frac{AR}{RC}+\frac{AQ}{QD}=1$.

2124. Даден е четириъгълник $ABCD$, за който $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CBD = 50^\circ$ и $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABD = \sphericalangle BCD$. Докажете, че $AD \perp BC$.

2145. Докажете, че за всички $a, b > 1$ е в сила неравенството $\prod_{k=1}^{n}(ak+b^{k-1}) \leq \prod_{k=1}^{n}(ak+b^{n-k})$.

2152. Нека $n \geq 2$ и $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$ са такива, че $\sum_{k=1}^{n}\sin x_k = 1$. Разглеждаме множеството S_n от всички суми $x_1 + x_2 + \dots + x_n$.
1. Докажете, че S_n е интервал.
2. Нека l_n е дължината на S_n. Намерете $\lim_{n\to\infty} l_n$.

2160. В $\triangle ABC$, $\sphericalangle BAC < 90^\circ$. Нека P е вътрешна точка за $\triangle ABC$ такава, че $\sphericalangle BAP = \sphericalangle ACP$ и $\sphericalangle CAP = \sphericalangle ABP$. Нека M и N са центрове на вписаните окръжности в $\triangle ABP$ и $\triangle ACP$, а R_1 е радиусът на описаната около $\triangle AMN$ окръжност. Докажете, че $\frac{1}{R_1}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AP}$.

2161. Пресметнете $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(3n-1)}$.

2164. Нека D е точка от страната BC на $\triangle ABC$ и нека E и F са центрове на вписаните окръжности в ABD и ACD. Известно е, че B, C, E и F лежат на една окръжност. Докажете, че
$$\frac{AD+BD}{AD+CD}=\frac{AB}{AC}.$$

2169. AB е диаметър в окръжност $K_1(O, R)$. P е произволна точка от K_1. Q е ортогоналната проекция на P върху AB. Окръжността $K_2(P, PQ)$ пресича K_1 в точките C и D, $CD \cap PQ = E$, F е среда на AQ и $FG \perp CD$, $G \in CD$. Докажете, че:

а) $EP = EQ = EG$

б) A, G и P са колинеарни.

2208. 1. Намерете множество от положителни цели числа такива, че
$$y^2z^2 = a^2+k^2$$
$$z^2x^2 = b^2+k^2$$
$$x^2y^2 = c^2+k^2$$

2. Покажете как ще се получат безброй много различни множества, удовлетворяващи тези равенства

2212. Нека $S = \{1, 2, \dots, n\}$, където $n \geq 3$.

а) По колко начина могат да се изберат три числа x, y, z от S (не непременно различни) такива че $x+y=z$ ($x+y=z$ и $y+x=z$ се разглеждат като едно и също решение)?

б) Какъв е отговорът на а), ако x, y, z трябва да са различни?

Митко Кунчев, Рус